Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 39

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

14 de septiembre de 2019

1. Transformada de Fourier del campo de KLEIN-GORDON

Demostrar que
$$\frac{\mathrm{d}^3k}{\omega_k} = \frac{\mathrm{d}^3k'}{\omega'_{k'}} \tag{1}$$
Es decir, demostrar que $\frac{\mathrm{d}^3k}{\omega_k}$ es invariante Lorentz. Para empezar, vamos a hacer una elección arbitraria que justificaremos luego, como recordamos del capítulo 39, al imponer que el campo sea real aparece un $\frac{1}{2}$ delante la integral, pues vamos a introducirlo aquí. Así queremos demostrar la invariancia de
$$\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k} \tag{2}$$
Evidentemente esto es completamente irrelevante, pues si algo es invariante, al multiplicarlo por una constante sigue siendo invariante. Desafortunadamente no sabemos como transforma la cantidad d^3k, pero sabemos que
$$\mathrm{d}^4k' = \left|\frac{\partial k'}{\partial k}\right| \mathrm{d}^4k = \left|\frac{\partial \Lambda k}{\partial k}\right| \mathrm{d}^4k = |\Lambda|\,\mathrm{d}^4k = \mathrm{d}^4k \tag{3}$$
Pues sabemos que para cualquier transformación de Lorentz cumple $|\Lambda| = 1$. Con esto en mente podemos introducir una integral extra, integrando sobre $\mathrm{d}k^0$ simplemente recordando que[1]
$$\mathrm{d}k^0\,\delta(k^0 - \omega_k) = 1 \tag{4}$$
Al hacer esto, k^0 es una variable de integración que puede tener cualquier valor, mientras que entendemos que ω_k está fijado por la ecuación
$$\omega_k = \sqrt{\vec{\mathbf{k}}^2 + m^2} \tag{5}$$
Entonces tenemos que
$$\frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k} = \frac{\mathrm{d}^3k}{2\omega_k}\,\mathrm{d}k^0\,\delta(k^0 - \omega_k) = \frac{\delta(k^0 - \omega_k)}{2\omega_k}\,\mathrm{d}^4k \tag{6}$$
Ya sabemos que el diferencial es invariante bajo transformaciones de Lorentz, por lo que nos queda demostrar que $\frac{\delta(k^0-\omega_k)}{2\omega_k}$ también lo es. Para ver que es invariante fijémonos en que podemos simplificarlo un poco, pues recordemos la propiedad
$$\delta(f(k^0)) = \frac{\delta(k^0 - \omega_k)}{|f'(\omega_k)|} \tag{7}$$
Ahora entendemos porqué el 2 nos era conveniente, para identificar esta ecuación con la expresión que nosotros queremos demostrar solo tenemos que encontrar una función $f(k^0)$ que cumpla:
$$f(\omega_k) = 0 \text{ y } f'(k^0) = 2k^0 \tag{8}$$

[1]Durante todo este ejercicio voy a ignorar el símbolo $\int$, que debe suponerse siempre junto a cualquier diferencial.

Esto es un problema de ecuaciones diferenciales bastante fácil, pues la función $f(k^0)$ tiene que ser

$$f(k^0) = \int 2k^0 \, \mathrm{d}k^0 = (k^0)^2 + C \tag{9}$$

Imponiendo la condición inicial:

$$f(\omega_k) = (\omega_k)^2 + C = 0 \Longrightarrow C = -\omega_k^2 \tag{10}$$

$$f(k^0) = (k^0)^2 - \omega_k^2 = (k^0)^2 - \vec{\mathbf{k}}^2 - m^2 = k^2 - m^2 \tag{11}$$

Donde he usado que $\omega_k^2 = \vec{\mathbf{k}}^2 + m^2$ y que $k^2 = (k^0)^2 - \vec{\mathbf{k}}^2$ Por lo tanto uno podría escribir

$$\frac{\delta(k^0 - \omega_k)}{2\omega_k} = \delta(k^2 - m^2) \tag{12}$$

Esto desgraciadamente aún no es correcto, pues al hacer todo esto hemos usado la ecuación (7) que solo es válida si $f(x) = 0$ tiene una única solución. Pero $(k^0)^2 - \omega_k^2 = 0$ tiene dos soluciones:

$$k^0 = \omega_k, \qquad k^0 = -\omega_k \tag{13}$$

Nosotros solo estamos interesados en la primera, entonces para hacer esto, como $\omega_k > 0$ simplemente tenemos que imponer que $k^0 > 0$, de forma que descartamos la segunda solución. Para hacer esto matemáticamente usaremos la función

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{14}$$

Ahora sí, podemos escribir

$$\frac{\delta(k^0 - \omega_k)}{2\omega_k} = \delta(k^2 - m^2)\theta(k^0) \tag{15}$$

Que, ahora sí es correcto. Y resulta que el lado derecho de esta ecuación es manifiestamente invariante Lorentz! Vamos a verlo por si alguien aún no está 100 % convencido: Para empezar el término $\delta(k^2 - m^2)$ es invariante Lorentz, pues k^2 es invariante Lorentz y m^2 también (pues es constante). Por lo que, si para un observador se cumple que $k^2 = m^2$ para cualquier otro observador también se cumplirá esto. El término $\theta(k^0)$ también es invariante, pues si para un observador $k^0 > 0$, entonces para cualquier otro $k'^0 > 0$. Esto es verdad, en general, para cualquier cuadrivector con $k^2 > 0$. Vamos a demostrarlo:

$$0 < k^2 = (k^0)^2 - \vec{\mathbf{k}}^2 \Longrightarrow (k^0)^2 > \vec{\mathbf{k}}^2 \Longrightarrow k^0 > |\vec{\mathbf{k}}| \Longrightarrow \frac{|\vec{\mathbf{k}}|}{k^0} < 1 \tag{16}$$

Haciendo una trasformación de Lorentz[2]

$$k'^0 = \gamma(k^0 - \vec{\boldsymbol{\beta}} \cdot \vec{\mathbf{k}}) \geq \gamma(k^0 - \beta|\vec{\mathbf{k}}|) = \gamma k^0 \left(1 - \beta\frac{|\vec{\mathbf{k}}|}{k^0}\right) > 0 \Longrightarrow k'^0 > 0 \tag{17}$$

Tal como queríamos demostrar. Aclarar que en la última ecuación he usado las desigualdades $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} \leq ab$, $\beta < 1$ y $k^0 > 0$.

[2]Podemos limitarnos a considerar "boosts", pues las rotaciones nunca afectan la componente temporal.